

ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ПОРЯДКАХ ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ С ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ОПРЕДЕЛЁННОЙ ФОРМЫ

Д.А. Никитин

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнёва

В теории цифровой обработки сигналов почти не рассматривается вопрос синтеза цифровых рекурсивных фильтров (БИХ-фильтров) по заданной импульсной характеристике. Тем не менее в работах [1, 2] говорится о том, что для любой последовательности, члены которой описываются любой функцией из указанного ниже множества функций, существует БИХ-фильтр конкретного порядка с импульсной характеристикой, совпадающей с исходной последовательностью. Под словом «описывается» подразумевается, что члены последовательности являются значениями этой функции, взятыми на равномерной сетке. Порядок фильтра зависит только от вида функции, описывающей импульсную характеристику, и не зависит от её параметров.

Сказанное выше справедливо для следующего множества функций:

- любые полиномиальные функции;
- любые показательные функции;
- любые синусоиды или косинусоиды;
- произвольные периодические функции при условии, что период функции кратен расстоянию между взятыми отсчётами;

Утверждать это позволяет тот факт, что для данных функций (т.е. для импульсных характеристик таких видов) выполнены доказательства существования БИХ-фильтров определённого порядка. Ниже приведены формулировки доказанных теорем.

Фильтрация при помощи цифрового рекурсивного фильтра описывается уравнением [3]

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k),$$

где a_k и b_k — действительные коэффициенты. M и N — конечные положительные числа, большее из которых называется порядком фильтра.

ТЕОРЕМА 1. Для последовательности Y длины $L \geq 2(n+1)$, члены которой являются равноотстоящими отсчётами полиномиальной функции одного переменного $y_i = p_n(i) = \alpha_0 \cdot i^n + \alpha_1 \cdot i^{n-1} + \dots + \alpha_n$, $\alpha_0 \neq 0$, и заданы любые $(n+1)$ подряд идущих члена $y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+n}$, существует единственный рекурсивный цифровой фильтр порядка $n+1$ ($M=n+1, N=n$), импульсная характеристика которого совпадает с Y .

ТЕОРЕМА 2. Для последовательности $Y=y(i)$ длины $L \geq 4$, члены которой являются равноотстоящими отсчётами показательной функции $y_i = f(i) = k \cdot a^{bi} + c$, $a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0, k \neq 0$, и заданы первые 4 члена y_0, y_1, y_2, y_3 , существует единственный рекурсивный цифровой фильтр второго порядка ($M=2, N=1$), импульсная характеристика которого совпадает с Y .

ТЕОРЕМА 3А. Для последовательности $Y=y(i)$ длины $L \geq 4$, члены которой являются равноотстоящими отсчётами синусоидальной функции $y_i = f(i) = a \cdot \sin(b \cdot i + c)$, $a \neq 0, b < \pi$, и заданы первые 4 члена y_0, y_1, y_2, y_3 , существует единственный рекурсивный цифровой фильтр второго порядка ($M=2, N=1$), импульсная характеристика которого совпадает с Y .

ТЕОРЕМА 3Б. Для последовательности $Y=y(i)$ длины $L \geq 6$, члены которой являются равноотстоящими отсчётами синусоидальной функции

$y_i = f(i) = a \cdot \sin(b \cdot i + c) + d$, $a \neq 0$, $b < \pi$, $d \neq 0$, и заданы первые 6 членов y , $y_1, \dots, y_5$, существует единственный рекурсивный цифровой фильтр третьего порядка ($M=3$, $N=2$), импульсная характеристика которого совпадает с Y .

ТЕОРЕМА 4А. Для любой периодической последовательности $Y=y(i)$ периода T и длины $L \geq T$ существует рекурсивный цифровой фильтр порядка T ($M=T$, $N=T-1$), импульсная характеристика которого совпадает с Y . Коэффициенты такого фильтра будут равны: $b_0 = y_0$, $b_1 = y_1, \dots, b_T = y_T$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0, \dots, a_{T-1} = 0$, $a_T = -1$, где $y_0, \dots, y_T$ — значение членов последовательности на периоде.

ТЕОРЕМА 4Б. Для любой периодической последовательности $Y=y(i)$ периода $T=2k$ со значениями на периоде вида $(s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, -s_0, -s_1, \dots, -s_{k-1})$ и длины $L \geq T$ существует рекурсивный цифровой фильтр порядка k ($M=k$, $N=k-1$), импульсная характеристика которого совпадает с Y . Коэффициенты такого фильтра будут равны: $b_0 = s_0$, $b_1 = s_1, \dots, b_{k-1} = s_{k-1}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0, \dots, a_{T-1} = 0$, $a_T = 1$.

Теоремы 3А и 3Б в равной степени справедливы и для косинусоиды, т.к. фактически косинусоида является синусоидой, смещённой на $-\pi/2$ по оси абсцисс. А в решаемой задаче (синтез цифрового фильтра по импульсной характеристике) в общем случае неважно, является ли первый отсчёт импульсной характеристики нулевым или нет.

Теоремы 4А и 4Б распространяются на импульсные характеристики периодического характера. При этом 4А является универсальной, а 4Б действует для периодических последовательностей специального вида (описывающая функция чётна на каждом периоде), что позволило доказать существование фильтра в 2 раза меньшего порядка, чем в теореме 4А.

Данные теоремы расширяют доказательную базу для синтеза БИХ-фильтров только по импульсной характеристике.

Литература

1. Никитин Д.А. Синтез рекурсивных цифровых фильтров по импульсной характеристике, определяемой элементарной математической функцией [Текст] / Д.А. Никитин, В.Х. Ханов. — Цифровая обработка сигналов. — Науч.-техн. журн. — Москва, 2008, №3. — С. 10-14.
2. Никитин Д.А. Расчёт рекурсивного цифрового фильтра по его импульсной характеристике [Текст] / Д.А. Никитин — Сборник докладов XIII междунар. науч.-технич. конф. «Радиолокация, навигация, связь» (RLNC-2007) — ООО НПФ «САКВОЕЕ» — Воронеж, 2007. — Т. 1, с. 335–341.
3. Айфичер Э. С., Джервис Б. У. Цифровая обработка сигналов: практический подход. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.